Préférences Quasi Linéaires - Solutions

Venance Riblier

1) Ces préférences peuvent admettre un équilibre en coin. En effet, l'utilité marginale de chaque biens est finie:

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0} u_x(x, y) = \log(y + 1) < \infty \\ \lim_{y \to 0} u_y(x, y) = x < \infty \end{cases}$$

On peut comparer ce cas avec les préférences Cobb-Douglass, où la première unité (infinitésimale) de bien consommé apporte une utilité marginale infinie à l'agent, qui a donc toujours intérêt à consommer une quantité positive de chaque biens. Ici, l'utilité marginale de la première unité consommée est finie, elle peut donc être trop faible pour inciter l'agent à consommer du bien. On peut distinguer trois cas, selon la valeur du TMS_{x-y} et de p.

Cas 1:

$$TMS_{x-y} = p \Leftrightarrow \frac{1}{y+1} = p$$

La préférence pour le bien y, relative au bien x (mesurée par le $TMS_{x-y} = \frac{\partial u/\partial y}{\partial u/\partial x}$) est égale au prix du bien y, relatif au bien x. L'agent est donc indifférent entre consommer une unité supplémentaire de bien y, ou l'échanger avec le marché pour consommer une unité supplémentaire de bien x. On est dans le cas standard de la solution intérieure.

Cas 2:

$$TMS_{x-y} > \Leftrightarrow \frac{1}{y+1} > p$$

La préférence pour le bien y, relative au bien x est supérieure au prix du bien y, relatif au bien x. L'agent a donc toujours intérêt à vendre une unité de bien x pour acheter une unité de bien y. A l'équilibre, l'agent ne consomme donc que du bien y. On a $y = \frac{R}{p}$ et $x = 0$.

Cas 3:

$$TMS_{x-y} < \Leftrightarrow \frac{1}{y+1} < p$$

Ce cas est symétrique au cas 2, ici la préférence pour le bien y, relative au bien x, est inférieure au prix du bien y, relatif au bien x. L'agent a donc toujours intérêt à échanger une unité de bien y contre une unité de bien x, et ne consomme donc que du bien x à l'équilibre. On a $x = R$ et $y = 0$.

2) Pour trouver les demandes marshalliennes, on résout le système suivant:

$$\begin{cases} TMS_{x-y} = p \Leftrightarrow \frac{1}{y+1} = p \\ R = x + py \end{cases}$$

Ce qui donne:

$$\begin{cases} y(p) = \frac{1-p}{p} \\ x(R,p) = R - 1 + p \end{cases}$$

On vérifie les conditions pour avoir une solution intérieure:

$$\begin{cases} y(p) > 0 \\ x(R,p) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > p \\ R > 1 - p \end{cases}$$

On peut noter que la demande pour le bien y ne dépend pas du revenu. On peut expliquer ce résultat par la nature des préférences du consommateur. L'utilité marginale du bien x est constante et égale à 1. A l'inverse, l'utilité marginale du bien y est décroissante. Ainsi, l'agent a toujours intérêt à consommer plus de bien x, qui absorbe toute augmentation du revenu R. Le choix de y dépend donc uniquement de l'arbitrage avec x. Ce résultat est une propriété connue des préférences quasi linéaires, qui permettent de faire abstraction de l'effet de richesse sur le bien y.

On peut exprimer la fonction d'utilité indirecte:

$$V(R,p) = R + p - 1 - \log(p)$$

3) On s'intéresse maintenant au surplus retiré par le consommateur de la consommation du bien y.

i) On reste dans le cas de la solution intérieure. La fonction de demande inverse est donnée par:

$$p(y) = \frac{1}{y+1}$$

ii) Le surplus du consommateur est défini par:

$$\mathcal{S}(\bar{q}) = \int_0^{\bar{q}} p(y)dy - p(\bar{q})\bar{q} = \int_0^{\bar{q}} \frac{1}{y+1}dy - \frac{\bar{q}}{\bar{q}+1} = \log(\bar{q}+1) - \frac{\bar{q}}{\bar{q}+1}$$

4) On utilise le résultat de la question précédente:

$$\mathcal{S}(1) - \mathcal{S}(3) = \left(\log(2) - \frac{1}{2}\right) - \left(\log(4) - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} - \log(2)$$

$\log(2) > \frac{1}{4}$, l'introduction du quota entraine donc une réduction du surplus du consommateur.

5) Pour calculer la perte d'utilité induite par le quota, on utilise la fonction d'utilité indirecte $V(R, p)$. L'introduction du quota entraine un changement des quantités de bien y consommées et donc du prix $p(y)$. On calcule donc le prix d'équilibre avant et après l'introduction du quota.

$$\begin{cases} p(3) = \frac{1}{4} \\ p(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Pour compenser la perte d'utilité induite par le quota, le gouvernement fixe T afin que:

$$\begin{aligned} V(R+T, p(1)) = V(R, p(3)) \quad &\Leftrightarrow T + \log(2) - \tfrac{1}{2} = \log(4) - \tfrac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow T = \log(2) - \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

On remarque que le transfert qui compense la perte d'utilité subie par le consommateur, est égal à la perte de surplus induite par le quota. Ce résultat est également une propriété des préférences quasi-linéaires. Le revenu n'entre dans la fonction d'utilité indirecte que par x, dont l'utilité marginale est égale à 1. Ainsi, l'effet d'une variation de revenu sur l'utilité de l'agent peut se mesurer en terme monétaire, c'est à dire dans la même unité de mesure que le surplus du consommateur.

6) On pose maintenant les préférences suivantes: $u(x, y) = \log(x) + \log(y + 1)$.

i) On commence par calculer les fonctions de demande marshalliennes. A l'équilibre du consommateur on a:

$$TMS_{x-y} = \frac{x}{y+1} = p$$

Ce qui, combiné avec la contrainte budgétaire donne:

$$\begin{cases} y(R, p) = \frac{R-p}{2p} \\ x(R, p) = \frac{R+p}{2} \end{cases}$$

On obtient la fonction d'utilité indirecte:

$$V(R,p) = 2\log\left(\frac{R+p}{2}\right) - \log(p)$$

ii) On exprime dans un premier temps la fonction de demande inverse pour le bien y.

$$p(y) = \frac{R}{2y+1}$$

On calcule maintenant le surplus:

$$\mathcal{S}(\bar{q}) = \int_0^{\bar{q}} \frac{2}{2y+1} dy - \bar{q}\frac{2}{2\bar{q}+1} = \log(2\bar{q}+1) - \frac{2\bar{q}}{2\bar{q}+1}$$

iii) La perte de surplus est donnée par:

$$\mathcal{S}\left(\frac{1}{2}\right) - \mathcal{S}(1) = \left(\log(2) - \frac{1}{2}\right) - \left(\log(3) - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6} - \log\left(\frac{3}{2}\right)$$

Avec ces nouvelles préférences, les prix d'équilibre avant et après introduction du quota sont donnés par:

$$\begin{cases} p(1) = \frac{1}{3} \\ p\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Le transfert T qui compense la perte d'utilité du consommateur est défini par:

$$\begin{aligned} V(R+T, p\left(\tfrac{1}{2}\right)) = V(R, p(1)) \quad &\Leftrightarrow 2\log\left(\tfrac{3+T}{2}\right) = 2\log\left(\tfrac{7}{6}\right) + \log(3) \\ &\Leftrightarrow T = \tfrac{7}{\sqrt{(3)}} - 3 \\ &\Leftrightarrow T \neq \mathcal{S}\left(\tfrac{1}{2}\right) - \mathcal{S}(1) \end{aligned}$$

Avec ces préférences, le transfert qui compense la perte d'utilité du consommateur ne correspond plus au changement de surplus. En effet, ici le revenu intègre la fonction d'utilité indirecte de manière non linéaire, l'utilité marginale d'un transfert direct est différente de 1. Par conséquent, l'effet de T doit être évalué en utilisant l'utilité marginale du consommateur comme unité, et non l'unité monétaire qui est utilisé pour mesurer le surplus du consommateur. Les préférences quasi linéaires étudiées dans les questions précédentes sont donc un cas particulier, où l'effet d'un transfert T sur l'utilité du consommateur peut être évalué dans la même unité que le surplus.